數學傳播　50卷1期, pp. 76-85

對數播 173 期張進安老師一文的回響

連威翔

一、前言

在數學傳播季刊 173 期的 [1] 文中, 作者張進安老師觀察並研究了 $\dfrac{1}{89}$ 的小數表達式後, 他預測並證明了底下的結果:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^n}=\frac{10}{89}, \tag{1}$$

其中 F_n 表示費氏數列的第 n 項。作者是引用網頁 [2] 中 Robert Miner 所介紹的矩陣方法證明 (1) 式, 隨後作者也進行一些延伸探討, 並預測 (1) 式可推廣爲

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{kn}}=\frac{10^k}{10^{2k}-10^k-1}. \tag{2}$$

在 [1] 文最後, 作者提出一個問題供讀者思考, 該問題之所以會出現, 是因爲作者先在上式中令 $k=\log r$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{r^n}=\frac{r}{r^2-r-1}, \tag{3}$$

(此處寫法略異, 原寫法筆誤), 接著作者提到他在上式中令 $r=-2$ 與 $r=-3$, 發現級數的收斂是正確的, 但上述 r 的兩負值卻違反 $k=\log r$ 式中真數爲正數(即 $r>0$) 的條件, 於是邀請讀者一起來探究此處的問題出在哪裡。

在 [1] 文刊出後不久, 張鎮華教授撰寫 [3] 文作出回應, 並在 [3] 文最後說明寫法與 (3) 的左式很接近的級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{r^{n+1}}$ 收斂的充要條件是 $|r|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 且收斂的結果如下所示:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r^{n+1}}=\frac{1}{r^2-r-1}. \tag{4}$$

我們可對上式等號兩邊同乘 r, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r^n}=\frac{r}{r^2-r-1}, \tag{5}$$

又上式中有 $F_0 = 0$ 的條件, 將 $F_0 = 0$ 代入上式後即得 (3) 式, 而 (3) 式可看成是將 (1) 式一般化之後的結果。注意在 [1] 文最後作者所取的 $r = -2$ 與 $r = -3$ 皆滿足 $|r| > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的條件, 故按照 [3] 文的結論可知當 $r = -2, -3$ 時 (4) 式成立, 從而 (5) 式與 (3) 式成立。至此, 我們就知道 [1] 文最後取 $r = -2, -3$ 會違反 $k = \log r$ 真數爲正的條件, 是因爲 [1] 文作者先預測了 (2) 式再令 $k = \log r$ 來得到 (3) 式, 這使得 (3) 式中的 r 值受到 $r > 0$ 之條件所限制。要避免此問題, 我們應採 [3] 文作者的想法先證明 (4) 式以得到 (5) 式與 (3) 式, 這樣一來 (3) 式中的 r 值便不會受到 $r > 0$ 之條件所限制。

在 [3] 文刊出後不久, 許閎揚老師也透過 [4] 文寫下對 [1] 文的回應。許老師在 [4] 文中運用微積分的知識證明了無窮級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ 收斂的充要條件是下式成立:

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{6}$$

且級數收斂的結果爲

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}. \tag{7}$$

證明上述結果後, 許老師馬上透過對 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ 與 (6) 式令 $x = \dfrac{1}{r}$, 其中 $x \neq 0$, 藉此推論得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{F_n}{r^n}$ 收斂的充要條件是 $|r| > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 而收斂的結果如 (5) 式所示。

拜讀過 [1], [3], [4] 這三篇精彩的文章後, 筆者發現自己對 [1] 文中利用 Robert Miner 的矩陣方法證明 (1) 式的過程感到相當有興趣, 也發現 [3], [4] 兩篇大作中並未就 [1] 文這部分的內容加以延伸探討。因此筆者便試著仿照 [1] 文所介紹的方式, 利用 [2] 文中 Robert Miner 所介紹的矩陣方法進行推論, 最後成功證明在 (6) 式的條件下會有底下冪級數收斂的結果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}, \tag{8}$$

而筆者將在底下的第二節中介紹上述證明。除此之外, 注意[1]文中證明 (1) 式的方式是仿照 [2] 文的方法先令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$, 接著寫下一段比 [2] 文更清楚的推導過程證明 (1) 式成立。與 [2] 文相同的是, [1] 文在證明 (1) 式成立的推論過程中也使用了

$$I + A + \cdots + A^n + \cdots = (I - A)^{-1} \tag{9}$$

這個極限式。在 [2] 文中, 作者提到只要透過對上述矩陣 A 進行對角化即可證明 (9) 式成立, 但並未寫下細節。在本文第三節中, 筆者將會先令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & x \end{bmatrix}$, 接著將在 (6) 式的條件下證明 (9) 式成立, 藉此介紹更一般的結果。

二、Robert Miner 矩陣解法的推廣

在 [1] 文中, 作者使用 [2] 文 Robert Miner 的矩陣解法, 先令 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{100} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$ 並利用 (9) 式推得 (1) 式的結果; 在另一段的內容中, 作者也說明若改以 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 進行同樣操作的話, 則可證明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=2.$$

得知上述兩個使用矩陣的推論方式後, 筆者觀察並仿照上述兩個矩陣 A 的取法, 考慮取一般化的矩陣 A 如下:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ x^2 & x\end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中 x 爲實數, 接著我們可以使用類似的手法證明 (8) 式成立, 其中第一件事是要確定在怎樣的 x 值範圍內下式矩陣的無窮級數和會收斂:

$$I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots. \tag{11}$$

在找出使上式收斂的 x 值範圍後, 我們可在此 x 值範圍內求出 (11) 式的無窮級數和所收斂到的矩陣, 藉此求得 (8) 式中 $\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n$ 的表達式。可預期的是所求得使 (11) 式收斂的 x 值範圍應會與 (6) 式相同, 但此處我們該如何證明這件事呢? 底下將介紹此問題的答案。

注意當 $x=0$ 時 $\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n$ 收斂, 因此接下來我們暫時只看 $x\neq 0$ 的情形。首先計算 (10) 式中矩陣 A 的固有值, 該固有值爲

$$\begin{vmatrix}-t & 1\\ x^2 & x-t\end{vmatrix}=t^2-xt-x^2=0$$

的兩根, 即

$$\frac{x\pm\sqrt{5}|x|}{2}.$$

不難看出, 無論 x 之值取爲正數或負數, 上述矩陣 A 的兩固有值皆可表爲

$$\frac{(\sqrt{5}+1)x}{2},\quad -\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2},$$

因此對於矩陣 A 的兩固有值, 我們可令

$$\lambda_1=\frac{(\sqrt{5}+1)x}{2},\qquad \lambda_2=-\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2}.$$

此時可先計算得 $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}x$, 因此在 $x \neq 0$ 的條件限制下可知 $\lambda_1 \neq \lambda_2$; 另一方面, 注意 λ_1, λ_2 兩數滿足

$$\lambda_1 + \lambda_2 = x, \tag{12}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = -x^2, \tag{13}$$

因此 (10) 式中的矩陣 A 可表爲

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

令與固有值 λ_1, λ_2 對應的固有向量分別爲 v_1, v_2, 透過紙筆計算, 我們知道 v_1, v_2 可取爲

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

我們以上述 v_1, v_2 作爲一個 2×2 矩陣 P 的行向量, 即令

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

則可計算得 P 的反矩陣 P^{-1} 如下:

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。此時不妨回憶一下我們在線性代數課程中學到的知識, 利用 (14), (15), (16) 三式中矩陣 A, P, P^{-1} 的表達式計算 $P^{-1}AP$ 之後, 可得一對角矩陣 D 如下:

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

上述對角矩陣 D 之主對角線上的兩元恰好是 A 的兩固有值 λ_1, λ_2, 這樣的結果並不是巧合, 而是在線性代數理論中必然的結果。若要進一步說明 (17) 式的由來, 我們可以先令矩陣 D 的表達式如 (17) 式的右半邊所示, 接著利用 $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ 的條件搭配 (15) 式寫下

$$AP = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = PD. \tag{18}$$

取上式的頭尾並同時左乘 P^{-1}, 即可確定 (17) 式左半邊的等式成立。

接下來, 我們準備求出使 (11) 式矩陣 A 之無窮級數和收斂的 x 值範圍, 其中矩陣 A 的表達式與 x 的關係請參考 (10) 式。注意對於任意正整數 k, 由於 (17) 式中的矩陣 D 滿足

$$D^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{\text{共 } k \text{ 個 } P^{-1}AP} = P^{-1}A^kP,$$

因此得

$$A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^k \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{19}$$

利用上式與 (17) 式, 我們可寫出 (11) 式無窮級數之部分和的表達式如下:

$$\begin{aligned} & I + A + A^2 + \cdots + A^n \\ &\quad = PIP^{-1} + PDP^{-1} + PD^2P^{-1} + \cdots + PD^nP^{-1} \\ &\quad = P(I + D + D^2 + \cdots + D^n)P^{-1} \\ &\quad = P\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n \end{bmatrix}\right) P^{-1} \\ &\quad = P\begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + {\lambda_1}^2 + \cdots + {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + {\lambda_2}^2 + \cdots + {\lambda_2}^n \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

觀察上式後, 我們考慮證明底下的定理:

定理1: 已知 2×2 實矩陣 A 為可對角化矩陣, 且其固有值為兩實數 λ_1, λ_2, 則矩陣 A 的無窮級數 $I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$ 收斂的充要條件是 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$。

證明: 依定理 1 的前提知存在 2×2 可逆矩陣 P 與對角矩陣 D 使 (17) 式成立, 接下來同理可推得 (19) 式與 (20) 式成立。取 (20) 式的頭尾, 可得

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n = P\begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \cdots + {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \cdots + {\lambda_2}^n \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{21}$$

再利用上式寫下

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \cdots + {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \cdots + {\lambda_2}^n \end{bmatrix} = P^{-1}(I + A + A^2 + \cdots + A^n)P,$$

分別對以上兩式令 n 趨近於無窮大, 即可確定 $I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$ 收斂的充要條件是 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$, 至此定理 1 證明完畢。

證明定理 1 之後, 在 $|\lambda_1|<1$ 且 $|\lambda_2|<1$ 的條件下, 我們可先利用等比級數的求和公式改寫 (21) 式再令 n 趨近於無窮大, 得到

$$\begin{aligned}&I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots\\&=P\begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-{\lambda_1}^{n+1}}{1-\lambda_1} & 0\\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-{\lambda_2}^{n+1}}{1-\lambda_2}\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1-\lambda_1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{1-\lambda_2}\end{bmatrix}P^{-1},\end{aligned}\tag{22}$$

取上式的頭尾再將 (15), (16) 兩式中 P, P^{-1} 的表達式代入, 可計算得

$$\begin{aligned}I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots&=\frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}1&1\\ \lambda_1&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1-\lambda_1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{1-\lambda_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_2&-1\\ -\lambda_1&1\end{bmatrix}\\&=\frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_1}-\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_2} & \dfrac{-1}{1-\lambda_1}+\dfrac{1}{1-\lambda_2}\\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_1}-\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2} & \dfrac{-\lambda_1}{1-\lambda_1}+\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

接著利用 (12), (13) 兩式的條件, 將上式的結果繼續化簡如下:

$$\begin{aligned}&I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots\\&=\frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\dfrac{({\lambda_1}^2-{\lambda_2}^2)-(\lambda_1-\lambda_2)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} & \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} & \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{1-(\lambda_1+\lambda_2)}{1-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2} & \dfrac{1}{1-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2}\\ \dfrac{-\lambda_1\lambda_2}{1-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2} & \dfrac{1}{1-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-x}{1-x-x^2} & \dfrac{1}{1-x-x^2}\\ \dfrac{x^2}{1-x-x^2} & \dfrac{1}{1-x-x^2}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{23}$$

有了上式之後, 我們即可以 (10) 式的矩陣 A 模仿 [1] 文所用的矩陣方法進行計算。首先令 2×1 矩陣 u_k 滿足

$$u_k=\begin{bmatrix}F_kx^k\\ F_{k+1}x^{k+1}\end{bmatrix},$$

因此有 $u_1=\begin{bmatrix}F_1x\\ F_2x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ x^2\end{bmatrix}$, 且有

$$Au_k=\begin{bmatrix}0&1\\ x^2&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_kx^k\\ F_{k+1}x^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{k+1}x^{k+1}\\ (F_k+F_{k+1})x^{k+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{k+1}x^{k+1}\\ F_{k+2}x^{k+2}\end{bmatrix}=u_{k+1},$$

其中 $k \geq 1$。上述推論結果告訴我們對於滿足 $n \geq 2$ 的正整數 n, 將有

$$u_n = Au_{n-1} = A(Au_{n-2}) = A^2 u_{n-2} = \cdots = A^{n-1}u_1,$$

利用上式的條件, 可推得

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = Iu_1 + Au_1 + \cdots + A^{n-1}u_1 = (I + A + \cdots + A^{n-1})u_1.$$

在上式中令 n 趨近於無窮大, 因爲有 (23) 式收斂的結果, 我們可寫下

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots &= \left[\lim_{n\to\infty}(I + A + \cdots + A^{n-1})\right] u_1 \\ &= (I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots)u_1, \end{aligned}$$

此時即可利用本段開頭處 u_k 的表達式搭配上式與 (23) 式寫下

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1 x \\ F_2 x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_2 x^2 \\ F_3 x^3 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} F_n x^n \\ F_{n+1} x^{n+1} \end{bmatrix} + \cdots \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = (I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots)u_1 \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{1-x}{1-x-x^2} & \dfrac{1}{1-x-x^2} \\ \dfrac{x^2}{1-x-x^2} & \dfrac{1}{1-x-x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{1-x-x^2} \\ \dfrac{x^3+x^2}{1-x-x^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

推得上式之後, 即確定有

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}. \tag{24}$$

注意從 (12) 式上方矩陣 A 固有值的計算開始至上式爲止的討論過程中, x 值都受到 $x \neq 0$ 之條件所限制, 這是因爲在 (12) 式上方已先聲明暫時會在 $x \neq 0$ 的條件下進行討論。雖然如此, 但此處我們可看出當 $x = 0$ 時 (24) 式亦成立。

回顧上述討論過程, 可發現我們是先證明定理 1, 接著在 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的條件下利用 (22) 式推得 (23) 式, 最後再求得 (24) 式。注意 (24) 式與 (8) 式完全相同, 而 [4] 文定理 1 已說明在 (6) 式成立的條件下 (7) 式成立, 故 (8) 式成立。因此一個很自然的問題是: $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的條件是否等價於 (6) 式呢? 答案是肯定的。這兩組條件的等價性, 可寫成如下的定理:

定理2: 已知 x 爲實數, 而 λ_1, λ_2 兩數滿足

$$\lambda_1 = \frac{(\sqrt{5}+1)x}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2}$$

(同 (12) 式上方 λ_1, λ_2 的表達式), 則 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的充要條件是 (6) 式成立。

證明: 注意 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的條件等同於

$$\left|\frac{(\sqrt{5}+1)x}{2}\right| < 1 \quad 且 \quad \left|-\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2}\right| < 1,$$

由於 $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 因此上述條件等價於

$$|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad 且 \quad |x| < \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

即等價於 $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 或寫成

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

注意上式即爲 (6) 式, 因此知 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的條件與 (6) 式等價, 或者說 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的充要條件是 (6) 式成立, 至此定理 2 證明完畢。

證明了定理 2 之後, 我們知道當 (6) 式成立時, 可先令 x 爲非零實數以符合 (12) 式上方「暫時只看 $x \neq 0$ 的情形」之聲明, 接著利用定理 2 推得 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的條件, 再利用定理 1 推得矩陣的無窮等比級數和

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$$

收斂並推得 (22) 式。接下來即可從 (22) 式出發, 先推得 (23) 式再推得 (24) 式, 其中 $x \neq 0$。最後由於 $x = 0$ 時 (24) 式亦成立, 補上此情況後, 我們就知道若實數 x 滿足 (6) 式的條件則 (24) 式成立, 故 (8) 式與 (7) 式成立。

本節最後, 若將上面證明 (24) 式的過程拿來與 [1] 文證明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{10^n} = \frac{10}{89}$ 的過程作比較, 可發現兩者雖然都使用了 Robert Miner 的矩陣手法, 但其中的差別在於 [1] 文直接使用了 (9) 式的條件, 而本節內容對於 (24) 式的推論過程則並未使用 (9) 式。在下一節的內容中, 筆者將證明在 (6) 式成立的條件下 (10) 式的矩陣 A 滿足 (9) 式。

三、一個證明的補充

如同上一節的最後一段所預告, 本節內容將證明在 (6) 式成立的條件下 (10) 式的矩陣 A 滿足 (9) 式, 即滿足 $I + A + \cdots + A^n + \cdots = (I - A)^{-1}$, 證明如下:

證明: 若 (6) 式成立, 且矩陣 A 的表達式如 (10) 式所示, 則可先利用定理 2 確定 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$, 故 $1-\lambda_1, 1-\lambda_2$ 皆不等於 0。接著回顧 (19) 式並對其頭尾取 $k=1$, 可得

$$A = P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}P^{-1},$$

因此有

$$\begin{aligned}I-A &= PIP^{-1} - P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}P^{-1} = P\left(I - \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\right)P^{-1}\\ &= P\begin{bmatrix}1-\lambda_1 & 0\\ 0 & 1-\lambda_2\end{bmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

取矩陣 B 滿足

$$B = P\begin{bmatrix}\frac{1}{1-\lambda_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{1-\lambda_2}\end{bmatrix}P^{-1},$$

則可計算得

$$(I-A)B = P\begin{bmatrix}1-\lambda_1 & 0\\ 0 & 1-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{1-\lambda_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{1-\lambda_2}\end{bmatrix}P^{-1} = PIP^{-1} = I,$$

故 $I-A$ 是可逆矩陣, 其反矩陣爲 B。此時, 利用 (19) 式的條件可推論得

$$\begin{aligned}(I+A+\cdots+A^n)(I-A) &= (I+A+\cdots+A^n)-(A+A^2+\cdots+A^{n+1}) = I-A^{n+1}\\ &= PIP^{-1}-P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}^{n+1}P^{-1} = P\left(I-\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}^{n+1}\right)P^{-1}\\ &= P\begin{bmatrix}1-{\lambda_1}^{n+1} & 0\\ 0 & 1-{\lambda_2}^{n+1}\end{bmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

由於在上一段討論的開頭處已說明此時有 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的條件, 因此取上式的頭尾並令 n 趨近於無窮大後可得

$$(I+A+\cdots+A^n+\cdots)(I-A) = P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}P^{-1} = PIP^{-1} = I.$$

取上式的頭尾並同時右乘 $I-A$ 的反矩陣, 即得

$$I+A+\cdots+A^n+\cdots = (I-A)^{-1},$$

至此可知在 (6) 式成立的條件下 (10) 式的矩陣 A 滿足 (9) 式, 證明完畢。

注意 [1] 文所介紹的兩個以 Robert Miner 矩陣手法進行推論的過程分別是對 (10) 式的矩陣 A 取 $x=\frac{1}{10}$ 與 $x=\frac{1}{2}$ 後利用 (9) 式進行推論的過程, 由於兩者所取的 $x=\frac{1}{10}$ 與 $x=\frac{1}{2}$ 皆滿足 (6) 式的條件, 因此透過上述證明的結論可知當 $x=\frac{1}{10},\frac{1}{2}$ 時 (9) 式均成立, 故 [1] 文中以 Robert Miner 的矩陣手法利用 (9) 式完成的兩個推論過程是沒有問題的。

四、結語

本文只是簡單的心得分享, 當初在拜讀 [1] 文過後, 除了對文章的內容感到有興趣以外, 也發現裡面有些地方值得做進一步的探討, 因而促使筆者開始動筆寫作。幸運的是, 在寫作期間數學傳播又陸續刊登了 [3], [4] 這兩篇相關文章, 使筆者有更豐富的文獻資料可參考, 藉此才得以寫下更完整的內容。

本文最後, 筆者要感謝 [1], [3], [4] 文的三位作者, 若沒有他們三位所撰寫的精采文章, 相信也不會有本文的誕生。此外, 筆者也要特別感謝審稿者提出了許多寶貴的修改建議, 使本文內容得以更臻完善, 其中在 (12) 式上方透過去絕對值來簡化矩陣 A 兩固有值之表達式、兩固有值去絕對值後定理 2 證明的簡化、(18) 式的補充、定理 1 敘述的改寫與證明的簡化等工作, 皆有賴於審稿者所提出的建議才得以完成, 再次感謝。

參考文獻

1. 張進安。$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$ 的探源與推廣。數學傳播季刊, 44(1), 89-93, 2020。
2. Robert Miner, *The Remarkable Number* 1/89。
`http://www2.math.ou.edu/~dmccullough/teaching/miscellanea/miner.html`.
3. 張鎮華。費氏數列與等比數列的交會處。數學傳播季刊, 44(2), 58-61, 2020。
4. 許閎揚。關於「$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$ 的探源與推廣」之迴響。數學傳播季刊, 44(4), 38-44, 2020。

—本文作者投稿時正準備轉換工作跑道—